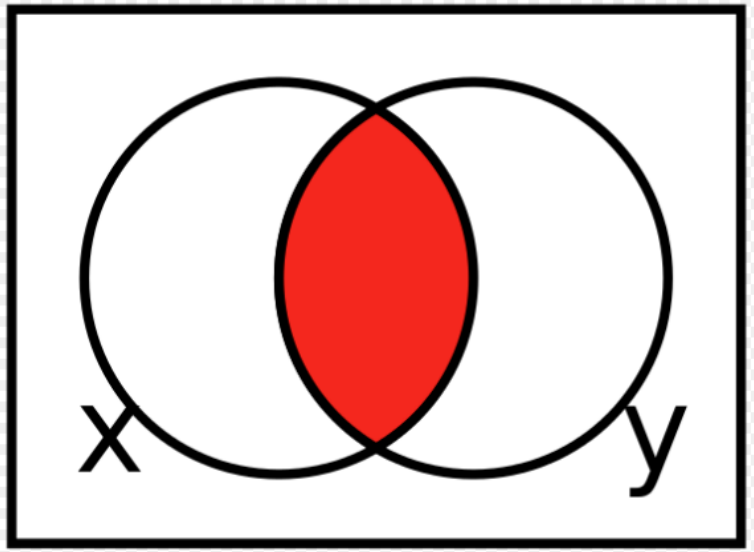
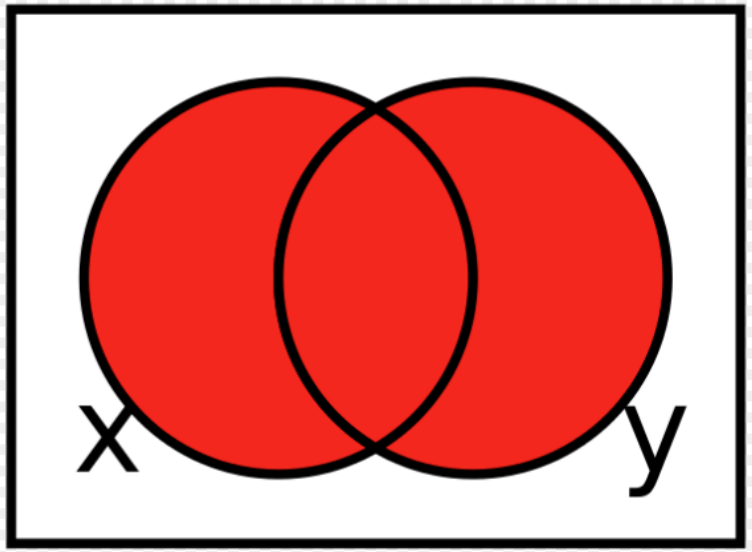
FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Grundlagen der Informationstechnik
Boole‘sche Algebra

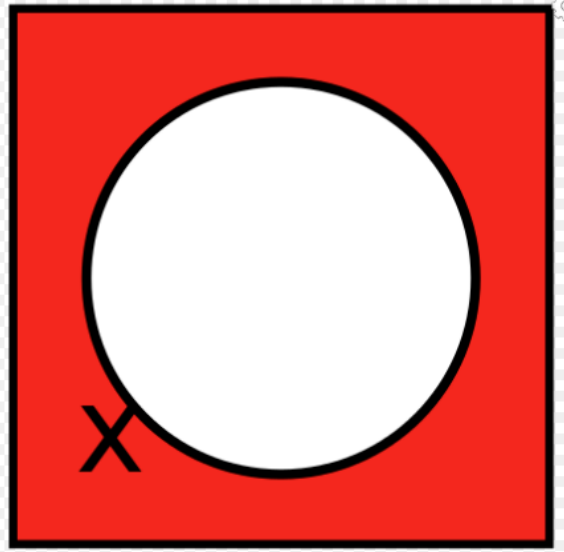
Peter Holzkämper



$x \wedge y$



$x \vee y$



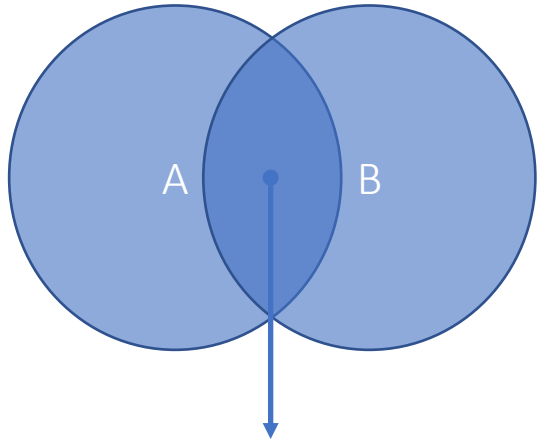
$\neg x$

Boole‘sche Algebra
Einführung

George Boole 1815 – 1864 | Aussagenlogik kann als Algebra aufgefasst werden. Es gibt nur Wahr (True) oder Falsch (False)

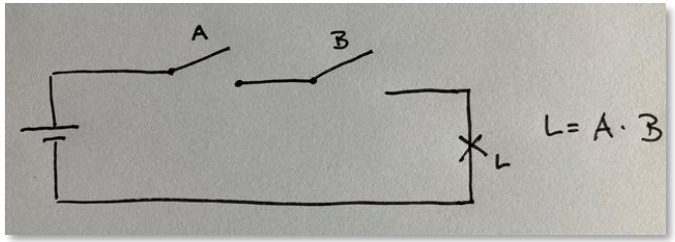
1 Das Verständnis der booleschen Algebra ist wichtig für die Entwicklung effizienter Strukturen - sowohl bei dem Entwurf von Schaltungen als auch in der Softwareentwicklung.

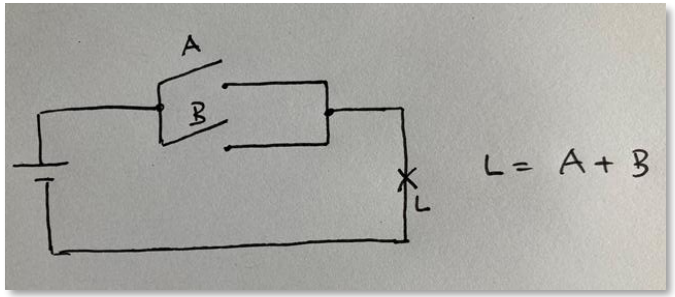
2 Georg Cantor 1845 – 1918 | Begründer der Mengenlehre



Schnittmenge
A und B

3 Claude Shannon 1916 – 2001 | Begründer der Schaltalgebra





Boole‘sche Algebra
Konventionen

Boolesche Konstanten: 0, 1

Boolesche Variablen: A, B, C, $\overline{A}$ (A nicht), $\overline{B}$ (B nicht), …

Beispiel:

Konjunktion

X = a • b — X ist gleich Eins, wenn a gleich Eins ist und b gleich Eins ist

X = a ^ b — Oftmals findet man auch diese Darstellungsform.

Disjunktion

X = a + b — X ist gleich Eins, wenn a gleich Eins ist oder b gleich Eins ist.

X = a ˅ b — Oftmals findet man auch diese Darstellungsform.

Boole‘sche Algebra
Konventionen

Beispiele:

$X = \overline{a}$ X ist gleich Eins, wenn a nicht Eins ist.

$X = \overline{a} \bullet \overline{b}$ X ist gleich Eins, wenn a nicht Eins ist und b nicht Eins ist.

$X = \overline{a + b}$ X ist gleich Eins, wenn (a oder b) nicht Eins ist.

Boole‘sche Algebra
Rechenregeln

$A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A$
$A \cdot 1 = A$	$A + 1 = 1$
$A \cdot A = A$	$A + A = A$
$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
Und!!!	Oder!!!

Boole‘sche Algebra
Rechenregeln / Schaltungsfunktion

Beispiele:

$A \bullet B + A \bullet C$

$(A + B) \bullet (A + C)$

$A + A \bullet B$

$A \bullet (A + B)$

$A \bullet (\overline{A} + B)$

Kontaktplan:

Boole'sche Algebra
Rechenregeln

Regel 1:
Man kann beide Seiten einer schaltalgebraischen Formel negieren, ohne dass sich deren Bedeutung ändert.
$X = a \bullet b$ oder $\overline{X} = \overline{a \bullet b}$

Regel 2:
Doppelte Negation ergibt wieder die ursprüngliche Größe!

$X = \overline{\overline{X}}$

Regel 3:
Folgende Vorrangigkeit der Schaltfunktionen ist zu beachten:
- UND-Funktion hat Vorrang vor ODER-Funktion
- Klammern haben vor UND-Funktion Vorrang
- Negationszeichen haben vor Klammern Vorrang

Regel 4:
Negationszeichen, die mehrere Variablen überspannen, kann man auflösen. Dabei gilt:
- Aus • wird + und aus + wird • – schauen wir uns an …

Regel 5:
Klammer werden wie in der üblichen Algebra aufgelöst (Assoziatives Gesetz) – schauen wir uns an …

Boole‘sche Algebra
Rechenregeln

Regel 4:

$$X = a \cdot b \qquad \bar{X} = \overline{a \cdot b} \qquad \bar{X} = \bar{a} + \bar{b}$$

oder

$$X = a + b \qquad \bar{X} = \overline{a + b} \qquad \bar{X} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

Boole‘sche Algebra
Rechenregeln

Kommutatives Gesetz:

$$A \cdot B = B \cdot A \qquad A + B = B + A$$

Kontaktplan:

Boole‘sche Algebra
Rechenregeln

Assoziatives Gesetz (Verbindungsgesetz):

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot C) \cdot B = A \cdot B \cdot C$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B = A + B + C$$

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz):

$$A \cdot (B+C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$
$$A + (B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$$

Probe ?

Boole‘sche Algebra
Rechenregeln | Distributiv Gesetz

Beweis: I. $(A \cdot B)+(A \cdot C)$
II. $=A \cdot (B+C)$

					I.		II.
A	B	C	A·B	A·C	A·B+A·C	B+C	A·(B+C)

Boole‘sche Algebra
Rechenregeln | Distributiv Gesetz

Beweis:

I. (A·B)+(A·C)
II. =A·(B+C)

I. und II. sind identisch!

					I.		II.
A	B	C	A·B	A·C	A·B+A·C	B+C	A·(B+C)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Boole‘sche Algebra
Rechenregeln

Beweis: I. (A+B)·(A+C)
II. =A+(B·C)

					I.		II.
A	B	C	A+B	A+C	(A+B)·(A+C)	B·C	A+(B·C)

Boole‘sche Algebra
Rechenregeln

Beweis:

I. (A+B)·(A+C)
II. =A+(B·C)

I. und II. sind identisch!

					I.		II.
A	B	C	A+B	A+C	(A+B)·(A+C)	B·C	A+(B·C)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Boole‘sche Algebra
Rechenregeln

Absorptionsgesetz:

$A \cdot (A+B) = A$

$A + (A \cdot B) = A$

Gesetz der Reduktion:

$$A\cdot(\overline{A}+B)=A\cdot B$$
$$A\cdot\overline{A}+A\cdot B$$
$$0+A\cdot B$$

$$A+(\overline{A}\cdot B)=A+B$$
$$(A+\overline{A})\cdot(A+B)$$
$$1\cdot A+B$$

OPTIMIERUNG



Boole‘sche Algebra
Rechenregeln

1.) A·B + A·C

Optimierung:

Boole'sche Algebra
Rechenregeln

2.) (A+B)·(A+C)

Optimierung:

3.) A+(A·B)

Optimierung:

Optimierung über Wahrheitstabelle

Boole'sche Algebra
Rechenregeln

4.) A·(A+B)

Optimierung:

Boole‘sche Algebra
Rechenregeln

5.) $A \cdot (\overline{A} + B)$

Optimierung:

Boole‘sche Algebra
Rechenregeln

6.) $A+(\overline{A}\cdot B)$

Optimierung:

Boole‘sche Algebra
Rechenregeln

7.) $A \cdot B + \overline{A} \cdot B$

Optimierung:

Gesetz von De Morgan:

$$(\overline{A \cdot B}) = \overline{A} + \overline{B} \qquad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Probe:

A	B	A·B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} + \overline{B}$	A+B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$

Gesetz von De Morgan:

$$(\overline{A \cdot B}) = \overline{A} + \overline{B} \qquad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Probe:

A	B	A·B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} + \overline{B}$	A+B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0